<table>
<tr><td colspan="2">W S E i Z W WARSZAWIE
WYDZIAŁ …………………</td></tr>
<tr><td colspan="2">LABORATORIUM FIZYCZNE</td></tr>
<tr><td>Ćwiczenie
Nr 1</td><td>Temat: WYZNACZNIE PRZYSPIESZENIA ZIEMSKIEGO
ZA POMOCĄ WAHADŁA REWERSYJNEGO</td></tr>
</table>

Warszawa 2009

WYZNACZANIE PRZYSPIESZENIA ZIEMSKIEGO ZA POMOCĄ WAHADŁA REWERSYJNEGO

1. Podstawy fizyczne.

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie przyśpieszenia ziemskiego na podstawie drgań harmonicznych wahadła rewersyjnego (odwracalnego).

Wśród licznych rodzajów drgań, najprostszym jest ruch drgający harmoniczny, w którym zmiany wielkości fizycznej w czasie opisuje funkcja okresowa harmoniczna (sinusoidalna). W przypadku, gdy okresowym zmianom harmonicznym podlega wychylenie ciała z położenia równowagi wzdłuż osi *x,* to zależność położenia od czasu *t* dana jest wzorem:

$$x = A\sin(\frac{2\pi}{T}t + \varphi) \tag{1}$$

gdzie x –wychylenie ciała z położenia równowagi przyjętego jako $x = 0$.
Wielkość A nosi nazwę amplitudy drgań. Jest to maksymalna wartość wychylenia ciała z położenia równowagi. Charakterystyczną cechą ruchu drgającego jest okresowość wyrażona we wzorze (1) przez okres drgań T. Jest czas jednego pełnego cyklu czyli czas po upływie którego dana wielkość (w rozważanym przypadku – wychylenie) przyjmie ponownie taką sama wartość (z dokładnością do znaku). Liczba pełnych drgań (cykli) w jednostce czasu wyraża się odwrotnością okresu i nosi nazwę częstotliwości ν :

$$\nu = \frac{1}{T} \tag{2}$$

Argument funkcji sinus we wzorze (1)

$$\alpha = \frac{2\pi}{T}t + \varphi \tag{3}$$

nazywa się fazą drgań a symbol φ oznacza fazę początkową określającą zgodnie ze wzorem (1) wychylenie w chwili t =0.

Zastanówmy się jakie warunki fizyczne muszą być spełnione, aby układ wykonywał drgania harmoniczne. Różniczkując dwukrotnie po czasie wyrażenie (1) otrzymujemy przyśpieszenie:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{4\pi^2}{T^2}A\sin(\frac{2\pi}{T}t + \varphi) = -\frac{4\pi^2}{T^2}x \tag{4}$$

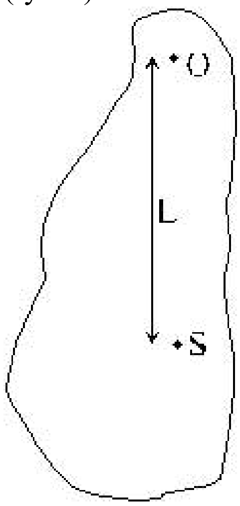
Widzimy, że przyśpieszenie *a* jest proporcjonalne do wychylenia z położenia równowagi i skierowane przeciwnie do wychylenia. Zgodnie z II zasadą dynamiki, siła *F* wyraża się wzorem

$$F = ma = -\omega^2 x \tag{5}$$

gdzie wprowadziliśmy oznaczenie $\omega^2 = -4\pi^2 / T^2$ (tzw. częstość kołowa drgań)
Stwierdzamy więc, że ciało wykonuje drgania harmoniczne jeżeli działająca siła jest

proporcjonalna do wartości wychylenia z położenia równowagi i zwrócona do położenia równowagi (na co wskazuje znak minus we wzorze (5)).

Jako przykład drgań harmonicznych rozważymy wahadło fizyczne grawitacyjne, którym jest dowolna bryła sztywna zawieszona na poziomej osi przechodzącej powyżej środka ciężkości (rys. 1).



Jeżeli taką bryłę odchylimy od położenia równowagi (czyli od pionu) o niewielki kąt, to bryła poruszać się będzie ruchem wahadłowym, przy czym siłą decydująca o ruchu będzie jej ciężar. Zauważmy, że każdy punkt bryły porusza się po łuku. Gdy odcinek łączący środek ciężkości bryły S z osią obrotu 0 odchylony jest od linii pionowej przechodzącej przez punkt zawieszenia o kąt θ, to na bryłę działa moment siły ciężkości:

$$M = -mgd\sin\theta \qquad (6)$$

gdzie d jest odległością od osi obrotu do środka ciężkości. Znak minus oznacza, że moment M wywołuje obrót w kierunku przeciwnym do kierunku w którym mierzymy kąt θ.

Rys1. *Wahadło fizyczne*

Dla dostatecznie małych kątów, możemy $\sin\theta$ zastąpić wartością kąta θ wyrażonego w mierze łukowej i wtedy wzór (7) przechodzi w

$$M = -mgd\theta = D\theta \qquad (7)$$

Wielkość $D = mgd$ nazywamy momentem kierującym. Jest to maksymalna wartość, jaką może przyjąć moment siły usiłujący przywrócić ciało do położenia równowagi. Do ruchu wahadła możemy zastosować drugą zasadę dynamiki ruchu obrotowego

$$M = I\varepsilon \qquad (8)$$

gdzie ε - jest przyśpieszeniem kątowym , zaś wielkość I jest momentem bezwładności bryły względem zadanej osi obrotu. ($I = \sum_i m_i r_i^2$ dla układu punktów materialnych m_i, których odległości od osi obrotu wynoszą odpowiednio r_i; $I = \int r^2 dm$ - dla ciągłego rozkładu masy). Uwzględniając wzór (8) oraz, że przyspieszenie kątowe

$$\varepsilon = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

możemy drugą zasadę dynamiki przepisać w postaci

$$D\theta = -I\,\frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad (9)$$

lub
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{D}{I}\theta \qquad (10)$$

Otrzymaliśmy równanie analogiczne do równania (5) a więc rozwiązanie będzie miało postać

$$\theta = \theta_0 \sin(\frac{2\pi}{T}t + \varphi) \qquad (11)$$

Z porównania wyrażeń (4) i (11) otrzymujemy wzór na okres wahań wahadła fizycznego

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} \qquad (12a)$$

lub podstawiając *D=mgd*

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \qquad (12b)$$

Wprowadzimy teraz pojęcie długości zredukowanej wahadła fizycznego. Długość zredukowana L wahadła fizycznego jest równa takiej długości wahadła matematycznego, które posiada ten sam okres drgań, co dane wahadło fizyczne. Przypomnijmy, że wahadło matematyczne przedstawia ciężarek (punkt materialny) zawieszony na nierozciągliwej i nieważkiej nici. Po odchyleniu nitki od pionu o niewielki kąt, nitka z ciężarkiem będzie poruszała się ruchem wahadłowym, którego okres *T* wynosi

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (13)$$

Z porównania wyrażeń pod pierwiastkami we wzorach (12b) i (13) otrzymujemy długość zredukowaną wahadła fizycznego

$$l = \frac{I}{md} \qquad (14)$$

Moment bezwładności *I* bryły względem dowolnej osi obrotu możemy wyznaczyć korzystając z twierdzenia Steinera. Twierdzenie to mówi, że moment bezwładności *I* bryły względem dowolnej osi równy jest momentowi bezwładności I_0 tej bryły względem osi przechodzącej przez jej środek ciężkości (i równoległej do danej osi), powiększonemu o iloczyn masy tej bryły przez kwadrat odległości między osiami:

$$I = I_0 + md^2 \qquad (15)$$

Po uwzględnieniu (15) zapisujemy wzór (14) w postaci:

$$l = \frac{I_0 + md^2}{md} \qquad (16)$$

Punkt bryły odległy o *l* od osi obrotu 0 nazywa się środkiem wahań wahadła fizycznego, grawitacyjnego

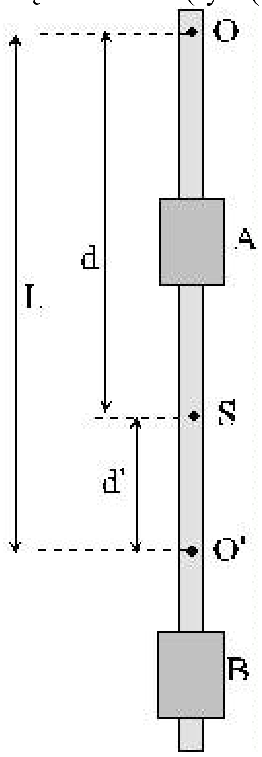
Wykażemy, że jeśli przez ten punkt przeprowadzimy oś obrotu równoległą do osi pierwotnej, to okres drgań względem nowej osi będzie taki sam, jak okres względem osi pierwotnej, przechodzącej przez punkt 0.Wahadło odwrócone o osi obrotu przechodzącej przez środku wahań ma okres drgań T wyrażający się wzorem:

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + md'^2}{mgd'}} \tag{17}$$

Z rysunku (2) widać, że $l - d = d'$ co po uwzględnieniu zależności (16) pozwala (po przekształceniach) zapisać wzór (17) w postaci:

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}(d + d')} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = T_0 \tag{18}$$

Ten fakt wykorzystuje się do wyznaczenia przyśpieszenia ziemskiego za pomocą wahadła fizycznego o specjalnej konstrukcji, tzw. wahadła rewersyjnego, (odwracalnego). Jest to bryła sztywna mająca takie dwie osie obrotu I i II , że okresy wahań względem nich są jednakowe. W ćwiczeniu wahadło rewersyjne przedstawia pręt metalowy, na którym znajdują się dwa ruchome ciężarki A i B (rys. (2).



Przez przesuwanie ciężarków zmieniamy położenie środka ciężkości pręta, a zatem i okres wahań. Osie obrotu mają postać pryzmatów nieruchomo umocowanych w stałej odległości od siebie. Przesuwając odpowiednio ciężarki znajdujemy takie ich położenie, przy którym okresy wahań względem obu osi są jednakowe, $T = T' = T_0$. Wtedy odległość między osiami będzie długością zredukowaną l odpowiadającą okresowi drgań T_0 równoważnego wahadła matematycznego. Znając długość zredukowaną, możemy ze wzoru (13) wyznaczyć wartość przyśpieszenia ziemskiego g:

$$\boxed{g = \frac{4\pi^2 l}{T_0^2}} \tag{19}$$

(19)

2. Wykonanie ćwiczenia.

1. Ciężarek A (znajdujący się między osiami) zamocowujemy mniej więcej w połowie odległości między osiami Ciężarek B umieszczamy w położeniu najbliższym osi 0.
2. Uruchamiamy wahadło i mierzymy czas dwudziestu wahnięć wokół osi 0.
3. Wyznaczamy okres drgań T Odwracamy wahadło, mierzymy czas 20 wahnięć wokół osi $0'$ i wyznaczamy okres drgań T'.
4. Przesuwamy ciężarek A o 2 cm, ponownie znajdujemy okresy wahań T i T' wokół osi

0 i θ'. Mierząc za każdym razem odległość ruchomego ciężarka A od osi 0. Postępujemy w ten sposób do momentu, gdy ciężarek A znajdzie się na końcu wahadła.
5. Po zmierzeniu okresów drgań wahadła zawieszanego na osi 0.-T. i osi 0-T w funkcji położenia x ruchomego ciężarka, sporządzamy wykres zależności okresów drgań wahadła od odległości ruchomego ciężarka od wybranej osi obrotu, $T = T(x)$ i $T' = T'(x)$
6. Znajdujemy na nim punkt (x_0, T_0) przecięcia krzywych $T(x)$ i $T'(x)$
7. Jeśli okaże się, że krzywe na wykresie nie przecięły się, zmieniamy położenie ciężarka B i doświadczenie powtarzamy od początku.
8. W przypadku, gdy krzywe przecinają się, sprawdzamy, ustawiając ciężarek A w punkcie x_0, czy istotnie wtedy $T = T'$. Gdyby okazało się, że dla tego ustawienia okresy nie są dokładnie sobie równe, przesuwamy A o około 1cm w jednym lub drugim kierunku. Powtarzamy pomiary. Położenie ciężarka uściślamy do momentu, gdy okresy w granicach błędu będą sobie równe.
9. Mierzymy odległość l miedzy osiami (długość zredukowaną).
10. Znalezioną wartość T_0 i l podstawiamy do wzoru (19), z którego obliczamy wartość przyśpieszenia ziemskiego.
11. Obliczamy błąd mierzonej wielkości (np. metodą pochodnej logarytmicznej).
12. Wyznaczoną wartość g porównujemy z wartością tablicową.

3. Pytania kontrolne

1. Jak zmienia się energia potencjalna i kinetyczna w ruchu harmonicznym nietłumionym?
2. Jakie wielkości charakteryzują ruch drgający harmoniczny?
3. Czy okres wahań wahadła matematycznego na biegunie i na równiku Ziemi będzie jednakowy?
4. Jaki byłby okres wahań wahadła fizycznego umieszczonego w spadającej swobodnie windzie?

4. Literatura.

1. T. Dryński: Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki. PWN, Warszawa, 1977.
2. R. Resnick, D. Halliday: Fizyka, t. 1. PWN, Warszawa, 1982.
3. H. Szydłowski: Pracownia fizyczna. PWN, Warszawa, 1979.