<table>
<tr><td colspan="2">W S E i Z W WARSZAWIE
WYDZIAŁ ………………</td></tr>
<tr><td colspan="2">LABORATORIUM FIZYCZNE</td></tr>
<tr><td>Ćwiczenie
Nr 4</td><td>Temat: WYZNACZANIE WSPÓŁCZYNNIKA PRZEWODNICTWA CIEPLNEGO METALI METODĄ ANGSTROMA</td></tr>
</table>

Warszawa 2009

.

BADANIE PRZEWODNICTWA CIEPLNEGO METALI METODĄ ANGSTRÖMA.

1. PODSTAWY FIZYCZNE

Doświadczenie poucza, że pomiędzy ciałami ogrzanymi do różnych temperatur zachodzi wymiana ciepła. Ciało o wyższej temperaturze traci ciepło, a ciało o niższej temperaturze ciepło zyskuje. Wymiana ta trwa tak długo, dopóki temperatury obu ciał nie zrównają się. Znamy trzy sposoby wymiany (przenoszenia) ciepła, a mianowicie:

a) przez prądy konwekcyjne (unoszenie ciepła)
b) przez promieniowanie
c) przez przewodzenie.

Przenoszenie ciepła przez unoszenie odbywa się razem z przenoszeniem materii. Towarzyszą temu tzw. prądy konwekcyjne czyli strumienie cieczy lub gazu*, które gdy mają temperaturę wyższą od temperatury otoczenia - unoszą ciepło do góry, a gdy mają temperaturę niższą od temperatury otoczenia - opadają w dół.

Wymiana ciepła przez promieniowanie polega na wytworzeniu kosztem ciepła energii promienistej, przeniesieniu tej energii w postaci fali elektromagnetycznej do ciała o niższej temperaturze i następnie zamianie energii fali w ciepło w procesie absorpcji fali przez to ciało.

Przewodzenie ciepła natomiast zachodzi wyłącznie wewnątrz ciała, którego jedne części mają wyższą temperaturę a inne niższą.

Pragnąc zbadać jedynie zjawisko przewodzenia ciepła, należy zaprojektować eksperyment tak, aby wyeliminować lub w znacznym stopniu ograniczyć wymianę ciepła przez promieniowanie i unoszenie. Eliminacja wymiany przez unoszenie polega na umieszczeniu układu pomiarowego w próżni lub ograniczeniu konwekcji poprzez utrudnienie przemieszczania się płynu otaczającego badany element. Z kolei wyeliminowanie wymiany przez promieniowanie polega na osłonięciu badanego elementu ekranem o temperaturze równej temperaturze badanego elementu. Wtedy tyle samo energii zostanie wypromieniowane z badanego elementu do ekranu, ile z ekranu w kierunku badanego elementu i wymianę ciepła przez promieniowanie będzie można pominąć. Minimalizację wymiany ciepła przez promieniowanie można także osiągnąć poprzez stosowanie niezbyt wysokich temperatur.

2. RÓWNANIE PRZEWODNICTWA CIEPLNEGO I TEMPERATUROWEGO.

W celu ułatwienia rozważań załóżmy, że wymiana (przepływ) ciepła odbywa się jedynie wzdłuż jednego wymiaru badanego ciała, pomiędzy jego końcami utrzymywanymi w stałych temperaturach T_1 i T_2. W praktyce można taki przepływ ciepła zrealizować w długim, jednorodnym, cienkim pręcie, z powierzchnią boczną starannie odizolowaną od otoczenia, pokazanym na rys. 1. Ciepło może tu wpływać do pręta lub z niego wypływać jedynie przez powierzchnie czołowe walca. Aby rozkład ciepła nie zmieniał się w czasie, tyle samo ciepła winno dopływać przez powierzchnię S_1, ile przez powierzchnię S_2 odpływać do otoczenia.

---

* Ciecze i gazy razem noszą nazwę płynów, jako że ich cząstki mogą bez ograniczeń poruszać się w całej objętości naczynia, w którym się znajdują.

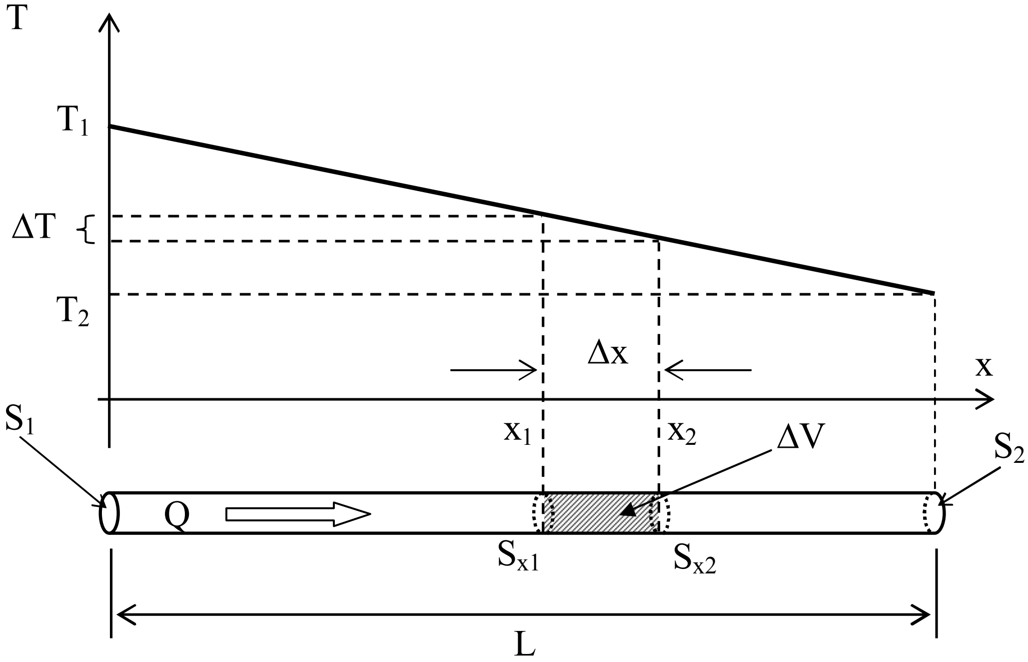
W pierwszym przybliżaniu załóżmy, że rozkład temperatury od odległości jest liniowy, a w materiale pręta nie ma żadnych dodatkowych źródeł ani ujść ciepła.

Doświadczenie pokazuje, że temperatura ciała zmienia się w czasie przepływu ciepła. Należy zatem zdefiniować **strumień ciepła** jako ilość ciepła ΔQ przepływającego przez ciało w czasie Δt:

$$\Phi = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad \left[\frac{J}{s}\right]. \tag{1}$$

Strumień ciepła przepływający przez powierzchnię S ciała nazywamy **natężeniem (lub gęstością) strumienia ciepła** i definiujemy jako:

$$F = \frac{\Phi}{S} = \frac{\Delta Q}{S \cdot \Delta t} \quad \left[\frac{J}{m^2 s}\right] = \left[\frac{W}{m^2}\right], \tag{2}$$



Rys. 1. Rozkład temperatur wzdłuż jednorodnego pręta w warunkach stacjonarnego przepływu ciepła.

Jeżeli na końcach pręta o długości L pokazanego na rysunku 1 powierzchnie S_1 i S_2 będą utrzymywane w różnych temperaturach T_1 i T_2 przy $T_1 > T_2$ a temperatury te będą stałe i niezależne od czasu, to strumień ciepła Φ (ilość ciepła $\Delta Q/\Delta t$ przepływającego w jednostce czasu od końca o wyższej temperaturze do końca o niższej temperaturze) też będzie niezależny od czasu, a przepływ taki będzie nosił nazwę **przepływu stacjonarnego**. Strumień ciepła Φ można opisać równaniem w postaci :

$$\Phi = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{L} S , \tag{3}$$

gdzie $\lambda \left(\left[\frac{J}{mKs}\right] = \left[\frac{W}{mK}\right]\right)$ oznacza współczynnik przewodnictwa cieplnego materiału pręta.

Rozważając przepływ ciepła przez odcinek pręta o długości Δx (i objętości ΔV), zależność (3) można zapisać w postaci:

$$\Phi = -\lambda \frac{\Delta T}{\Delta x} S = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} S \qquad \text{(przy } \Delta x \text{ dążącym do zera),} \tag{4}$$

Wielkość pochodnej temperatury T po odległości x, $\frac{\partial T}{\partial x}$, nazywamy **gradientem temperatury**. Po podzieleniu przez S oraz na podstawie zależności (2) otrzymujemy:

$$F = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \; . \tag{5}$$

Równanie powyższe nosi nazwę **prawa Fouriera** i można je wyrazić w twierdzeniu, że **przy stacjonarnym przepływie ciepła, strumień ciepła przepływający w jednostce czasu przez jednostkową powierzchnię jest proporcjonalny do gradientu temperatury. Współczynnik proporcjonalności λ nosi nazwę współczynnika przewodnictwa cieplnego.**

Prawo Fouriera stosuje się w sytuacjach, w których można założyć, że gradient temperatury jest mały, czyli przy Δx równym odległości międzycząsteczkowej w materii (ok. $10^{-7} \div 10^{-9}$ m w warunkach normalnych[*]) różnica temperatur sąsiednich powierzchni S_{x1} i S_{x2} odpowiadających położeniom x_1 i x_2 z rysunku 1, jest niewielka.

Prawo Fouriera zostało sformułowane dla przypadku, w którym temperatury T_1 i T_2 z rysunku 1 są stałe (niezależne od czasu), co oznacza, że ilość ciepła przepływającego od powierzchni o wyższej temperaturze do powierzchni o niższej temperaturze też będzie niezależna od czasu. Taki przepływ ciepła nosi nazwę **stacjonarnego**.

Prawo Fouriera dobrze opisuje przepływ ciepła także w sytuacji, w której przepływ nie będzie stacjonarny, lecz temperatury T_1 i T_2 będą wolno zmieniać się w czasie. W praktyce można dowieść, że im większy współczynnik przewodnictwa cieplnego materiału λ, tym lepiej prawo Fouriera opisuje przepływ ciepła w przypadku niestacjonarnego przepływu ciepła.

Powyższe ograniczenia pokazują, że równanie Fouriera nie dotyczy np. zjawisk przewodzenia ciepła zachodzących podczas eksplozji.

W celu sformułowania równania przewodnictwa cieplnego dla przypadku **niestacjonarnego** (tzn., gdy rozkład temperatury od odległości $T(x)$ zmienia się w czasie), należy utworzyć bilans cieplny odcinka o niewielkiej długości Δx, zawartego w pręcie z rys. 1. **Równanie przewodnictwa cieplnego w postaci różniczkowej**, omówione szerzej w Dodatku, ma postać równania składającego się z trzech składników:

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = c_W \rho \frac{\partial T}{\partial t} + q_{gen} \; . \tag{6}$$

---

[*] Warunki normalne oznaczają temperaturę 20°C i ciśnienie 1013 hPa.

Składnik $\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ opisuje różnicę pomiędzy ilością ciepła wpływającego w jednostce czasu do odcinka pręta o długości Δx przez powierzchnię S_{x1} a ilością ciepła wypływającego z tego odcinka pręta w jednostce czasu przez powierzchnię S_{x2} , przy czym ilość ciepła jest liczona na jednostkę objętości. Ilość tego ciepła, zmagazynowanego w objętości ΔV w jednostce czasu, przypadającą na jednostkę objętości, opisuje składnik $c_W \rho \dfrac{\partial T}{\partial t}$, gdzie ρ oznacza gęstość materiału pręta. Ostatni składnik q_{gen} , opisuje ilość ciepła liczoną na jednostkę objętości, przepływającą do ujść ciepła, lub dopływającą ze źródeł ciepła istniejących w materiale, w jednostce czasu. Substancja ciała może w rozważanej temperaturze podlegać przemianie fazowej - co zawsze zmienia energię wewnętrzną ciała. Składniki substancji ciała mogą po osiągnięciu odpowiedniej temperatury podlegać reakcji chemicznej. Jedna z powierzchni ciała może być także powierzchnią graniczną ciała, graniczącą z otoczeniem o temperaturze większej lub mniejszej od temperatury powierzchni. Przez ciało może przepływać strumień cząstek (np. elektronów), przekazując swoją energię atomom ciała. A zatem:

a) Źródłem ciepła może być zachodząca w danej temperaturze przemiana fazowa zmniejszająca energię wewnętrzną ciała (czyli powodująca wydzielenie ciepła), egzotermiczna reakcja chemiczna, pochłanianie (absorpcja) ciepła z otoczenia czy przepływający przez pręt prąd elektryczny.
b) Ujściem ciepła może być także przemiana fazowa ale zwiększająca energię wewnętrzną ciała (czyli powodująca pochłonięcie ciepła), endotermiczna reakcja chemiczna, odprowadzanie ciepła do otoczenia.

Równanie (6) można opisać obrazowo dla skończonych przedziałów czasu jako :

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\text{różnica ilości ciepła}\\ \text{wpływającego i}\\ \text{wypływającego przez}\\ \text{przewodzenie z objętości } \Delta V\end{array}}}{\Delta V \cdot \Delta t} = \frac{\boxed{\begin{array}{c}\text{ilość ciepła}\\ \text{zmagazynowanego}\\ \text{w objętości } \Delta V\end{array}}}{\Delta V \cdot \Delta t} + \frac{\boxed{\begin{array}{c}\text{ilość ciepła}\\ \text{wytworzonego}\\ \text{przez źródła ciepła}\\ \text{w objętości } \Delta V\end{array}}}{\Delta V \cdot \Delta t} .$$

Równanie (6) po podzieleniu przez c_w i ρ przyjmuje postać :

$$k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{q_{gen}}{c_W \rho}, \tag{7}$$

gdzie $k = \dfrac{\lambda}{c_W \rho}$ $\left[\dfrac{m^2}{s}\right]$, przy czym $\boldsymbol{k}$ nosi nazwę **współczynnika przewodnictwa temperaturowego materiału** pręta. Gdy przepływ ciepła jest stacjonarny, wtedy $\dfrac{\partial T}{\partial t} = 0$, a równanie (6) przyjmuje postać **równania przewodnictwa cieplnego w postaci różniczkowej dla przepływu stacjonarnego** :

$$k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{q_{gen}}{c_w \rho} \ . \tag{8}$$

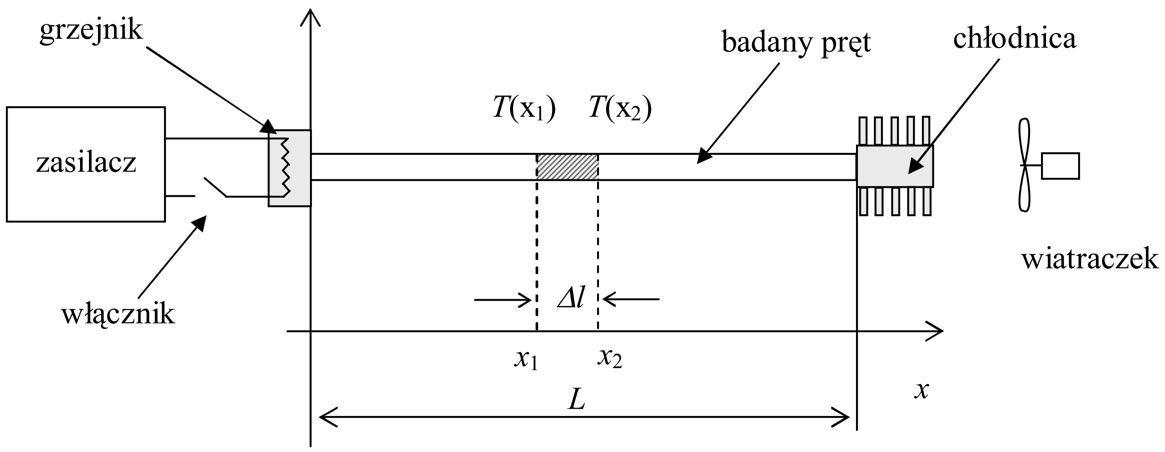
Gdy wewnątrz ciała nie ma źródeł ani ujść ciepła, wtedy $q_{gen} = 0$, a równanie (7) przyjmuje postać :

$$k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{\partial T}{\partial t}\ , \tag{9}$$

gdzie współczynnik przewodnictwa temperaturowego k jest proporcjonalny do prędkości wyrównywania się temperatur.

Wydawać by się mogło, że do pomiaru wartości k wystarczy zmierzyć zależność temperatury od odległości wzdłuż pręta, $T(x)$, dla stacjonarnego przepływu ciepła, czyli przy $\frac{\partial T}{\partial t}=0$, a następnie dwukrotnie zróżniczkować ten rozkład po odległości przy pomocy metod numerycznych. Zachodzą tu jednak dwie przeszkody. Pierwsza wynika z konieczności zapewnienia warunków pomiaru $T(x)$ tak, aby nie zakłócić rozkładu temperatur przez odprowadzanie ciepła przez wiele czujników temperatury z bocznej powierzchni pręta. Druga wynika z analizy rysunku 1. W praktyce rozkład temperatury wzdłuż pręta jest mocno zbliżony do liniowego. Wartość drugiej pochodnej zatem byłaby niewielka i bliska zeru. Obliczenie współczynnika proporcjonalności stojącego w równaniu przy wielkości bliskiej zeru obarczone byłoby dużym błędem. Metoda taka nadaje się wyłącznie do pomiaru przewodności cieplnej ciał źle przewodzących ciepło, czyli o małych wartościach λ.

3. METODA ANGSTRÖMA BADANIA PRZEWODNICTWA TEMPERATUROWEGO.



Rys. 2. Schemat do analizy przewodnictwa temperaturowego pręta w warunkach niestacjonarnego przepływu ciepła.

Metodę badania przewodnictwa temperaturowego ciał stałych w warunkach niestacjonarnego przepływu ciepła opracował Angström w latach 1861 - 1863.

Układ pokazany na rysunku 2 składa się z badanego pręta, do którego lewego końca przymocowany jest grzejnik a do prawego chłodnica. Układ zasilania grzejnika zaopatrzony jest w włącznik umożliwiający ogrzewanie lewego końca pręta tak, aby zmiana temperatury $T_{x=0}$ zachodziła w sposób periodyczny w czasie. Prawy koniec pręta zwarty jest cieplnie z chłodnicą tak, aby temperatura prawego końca pręta $T_{x=L}$ była niezmienna w czasie a ciepło było szybko odprowadzane do otoczenia. Powierzchnia boczna pręta jest odizolowana od otoczenia, zatem przepływ ciepła odbywa się tylko wzdłuż osi pręta Ox, a temperatura w każdym punkcie dowolnego przekroju poprzecznego pręta jest taka sama.

Do wyznaczenia współczynnika przewodności temperaturowej k materiału pręta niezbędne jest dokonanie pomiaru temperatury w dwóch, oddalonych od siebie o Δl punktach pręta. Doświadczalnie można dobrać moc grzejnika oraz okres jego włączania i wyłączania tak, aby temperatura $T_{x=0}$ zmieniała się sinusoidalnie od czasu t:

$$T(t)_{x=0} = T_0 \cos(\omega t + \alpha) \tag{10}$$

gdzie T_0 oznacza amplitudę, ω - częstość, α - fazę początkową temperatury.

Aby znaleźć rozwiązanie równania (10), czyli zależność $T(x)$ w dowolnym miejscu pręta przy temperaturze $T_{x=0}$ zmieniającej się według zależności (10), należy rozwiązać równanie różniczkowe (9) dla wymienionych warunków brzegowych. Ścisłe rozwiązanie czytelnik znajdzie w poz. 1 literatury. W przybliżeniu można założyć, że w dowolnym miejscu pręta temperatura będzie zmieniała się także w sposób periodyczny, aczkolwiek amplituda i faza temperatury mierzonej w dowolnym miejscu pręta będą już inne niż inicjowane przez grzejnik na początku pręta, dla x = 0 (wzór 11). Dość wspomnieć, że w dowolnym miejscu wzdłuż osi Ox pręta temperatura będzie miała wartość:

$$T(x,t) = T_0 \cdot e^{-ax} \cos(\omega t + \alpha + bx) \tag{11}$$

gdzie a i b są współczynnikami związanymi z współczynnikiem przewodności temperaturowej k w sposób następujący :

$$a \cdot b = \frac{\omega}{2k} \tag{12}$$

Jeżeli w punktach x_1 i x_2 pręta temperatura będzie zgodnie z (11) równa odpowiednio:

$$\begin{aligned} T(x_1,t) &= \overbrace{T_0 \cdot e^{-ax_1}}^{\mathrm{T}_1} \cos(\omega t - \alpha - bx_1)\ , \\ T(x_2,t) &= \underbrace{T_0 \cdot e^{-ax_2}}_{\mathrm{T}_2} \cos(\omega t - \alpha - bx_2)\ , \end{aligned} \tag{13}$$

[*] Rozwiązanie równania (9) dla temperatury w dowolnym miejscu pręta zmieniającej się według (11) wykazuje, że częstość ω przebiegu temperaturowego także ulegnie zmianie. Zmianę tę można przy przebiegach wolnozmiennych pominąć to stosunek amplitud T_1 i T_2 obu czasowych przebiegów temperatury, określonych równaniami (13) będzie równy $\frac{T_1}{T_2} = e^{a(x_2 - x_1)}$, a stąd:

$$a = \frac{\ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right)}{\Delta l}\ . \tag{14}$$

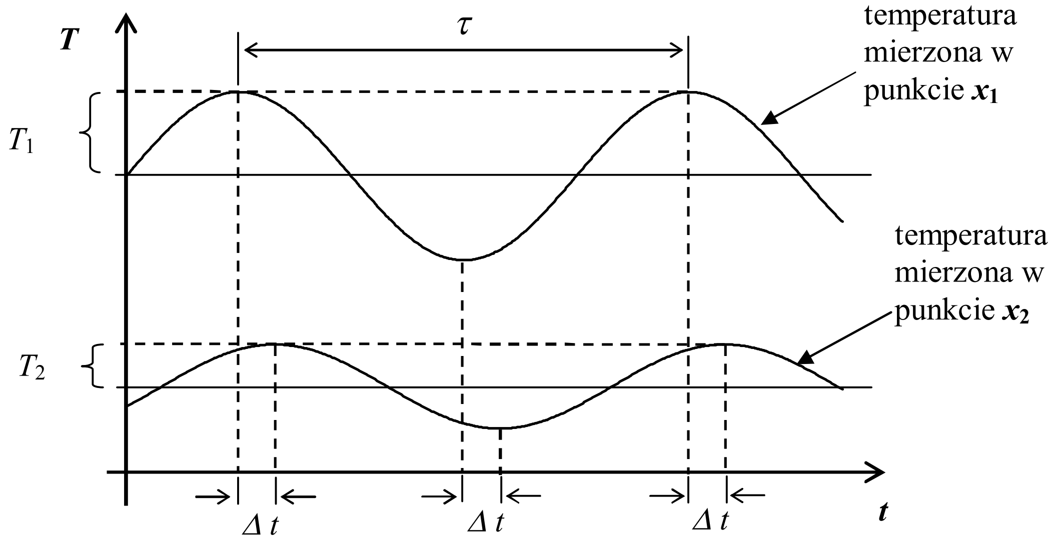
Z równań (13) wynika także różnica przesunięć fazowych $\Delta\varphi$ obu przebiegów temperatury. Będzie ona równa różnicy argumentów funkcji cosinus: $\Delta\varphi = b(x_2 - x_1)$.Stąd:

$$b = \frac{\Delta\varphi}{\Delta l}\ . \tag{15}$$

Z zależności (12) wynika, że $\frac{\omega}{2k} = \frac{2\pi}{\tau \cdot 2k} = a \cdot b$, gdzie τ jest okresem zmienności fali temperaturowej wytwarzanej przez grzejnik na początku pręta. Zatem:

$$k = \frac{\pi \cdot (\Delta l)^2}{\Delta\varphi \cdot \tau \cdot \ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right)} \quad \left[\frac{m^2}{s}\right], \tag{16}$$

gdzie Δl jest odległością pomiędzy punktami pomiaru temperatury w pręcie, τ - okresem periodyczności fali temperaturowej równym $\tau = \tau_1 + \tau_2$, przy czym τ_1 jest czasem, w którym grzejnik jest włączony a τ_2 jest czasem, w którym grzejnik jest wyłączony; $\Delta\varphi$ natomiast oznacza wartość przesunięcia fazowego pomiędzy temperaturami mierzonymi w obu punktach pomiaru temperatury.



Rys. 3. *Ustalony, czasowy przebieg temperatur mierzonych jednocześnie w punktach x_1 i x_2 badanego pręta.*

Wykres obu przebiegów temperatury o okresie τ, rejestrowanych równocześnie w dwóch punktach pręta po ustaleniu się periodycznego przepływu ciepła pokazano na rysunku 3.

Konieczną do obliczenia współczynnika przewodności temperaturowej k wartość przesunięcia fazowego $\Delta\varphi$ można obliczyć z przesunięcia czasowego Δt maksimów lub minimów temperatur z otrzymanego wykresu według zależności :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\tau} \cdot \Delta t \ . \tag{17}$$

Wartość współczynnika przewodnictwa cieplnego ostatecznie obliczamy przy znajomości ciepła właściwego i gęstości materiału z zależności:

$$\boxed{\lambda = k \cdot c_w \cdot \rho \quad \left[\frac{J}{mKs}\right]} \ . \tag{18}$$

4. Wykonanie ćwiczenia

1. Zapoznać się z układem pomiarowym ćwiczenia.
2. W pliku *Ciepło. exe* ustalić parametry pomiarowe.
3. Włączyć ogrzewanie pręta miedzianego. Zakończyć pomiary po uzyskaniu na ekranie monitora 2 wykresów obrazujących zależność temperatury (mierzonej w dwóch punktach pręta) od czasu (np. po upływie 3 min)
4. Powtórzyć pomiary dla pręta aluminiowego.

5. Opracowanie wyników

1. Zaimportować plik danych pomiarowych do programu „ORIGIN" i wykonać odpowiednie wykresy.
2. Z pomocą programu „ORIGIN" wyznaczyć z wykresów wartości parametrów potrzebnych do obliczenia współczynnika przewodnictwa cieplnego λ badanego metalu.
3. Oszacować błąd pomiaru $\Delta\lambda$.

6. Pytania kontrolne

1. Omówić prawo Newtona.
2. Omówić prawo Fouriera.
3. Omówić mechanizmy przenoszenia ciepła w przyrodzie.
4. Jak wyznaczyć współczynnik przewodnictwa cieplnego z wyników doświadczenia Angströma?

7. Literatura

1. F. Kaczmarek, *II Pracownia Fizyczna* PWN 1976.
2. C. Kittel *Wstęp do Fizyki Ciała Stałego* PWN 2000
3. Sz. Szczeniowski *Fizyka Doświadczalna* t. II, PWN
4. A. Sukiennicki, A. Zagórski, *Fizyka Ciała Stałego,* Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej, 1976.