<table>
<tr><td colspan="2" align="center">W S E i Z W WARSZAWIE<br>WYDZIAŁ ……………………..</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">LABORATORIUM FIZYCZNE</td></tr>
<tr><td align="center">Ćwiczenie<br>Nr 6</td><td align="center">Temat: WYZNACZANIE DYSPERSJI OPTYCZNEJ<br>PRYZMATU METODĄ POMIARU KĄTA<br>NAJMNIEJSZEGO ODCHYLENIA</td></tr>
</table>

**Warszawa 2009**

# WYZNACZANIE DYSPERSJI OPTYCZNEJ PRYZMATU METODĄ POMIARU KĄTA NAJMNIEJSZEGO ODCHYLENIA

## 1.Podstawy fizyczne.

Dyspersją optyczną $D_n$ materiału nazywamy właściwość (1) polegającą na istnieniu różnej wartości współczynnika załamania światła *n* dla różnych częstotliwości fali świetlnej $\nu$ (niekiedy, korzystając z zależności $\nu = c/\lambda$, mówi się o zależności *n* od długości fali $\lambda$, ale trzeba pamiętać, że długość fali zależy od ośrodka, w którym się ona przemieszcza, natomiast częstotliwość jest cechą charakterystyczną danej fali):

$$n = f(\nu) \tag{1a}$$

lub

$$n = f'(\lambda) \tag{1b}$$

Zjawisko dyspersji optycznej można zaobserwować oświetlając pryzmat wiązką światła białego. Pryzmat prosty tworzą dwie płaszczyzny schodzące się pod kątem $\varphi$, ograniczające jednorodny, przezroczysty materiał. Kąt ten nazywamy kątem łamiącym pryzmatu.

Po przejściu przez pryzmat, wiązka światła białego będącego mieszaniną różnych barw ulega rozszczepieniu tak, że na ekranie uzyskujemy wstęgę o tęczowych barwach zmieniających się od czerwieni do fioletu, tzw. widmo światła białego. Wynika stąd, że kąt o jaki pryzmat odchyla promień świetlny zależy od barwy światła. Miarą kąta odchylenia (załamania) promienia świetlnego przy przejściu przez granicę dwóch ośrodków jest współczynnik załamania. Można więc powiedzieć, że współczynnik załamania zależy od barwy światła lub dokładniej od długości fali świetlnej.
Należy jednak pamiętać, że długość fali $\lambda$ zależy od częstotliwości $\nu$ i prędkości fali v w danym ośrodku: $\lambda = v/\nu$. Przy przejściu fali przez granicę dwóch ośrodków zmienia się prędkość fali, natomiast nie ulega zmianie jej częstotliwość $\nu$. Tak więc, dyspersję można określić również jako zależność współczynnika załamania od częstotliwości fali.
W optyce geometrycznej, zachowanie się promienia świetlnego na granicy dwóch ośrodków opisują prawa: odbicia i załamania.

Prawo odbicia:

1. promień padający , odbity i normalna do powierzchni granicznej leżą w jednej płaszczyźnie; (rys. 1 )
2. kąt odbicia jest równy kątowi padania $\alpha = \alpha_0$

Prawo załamania zostało sformułowane przez W. Snelliusa około r. 1618:

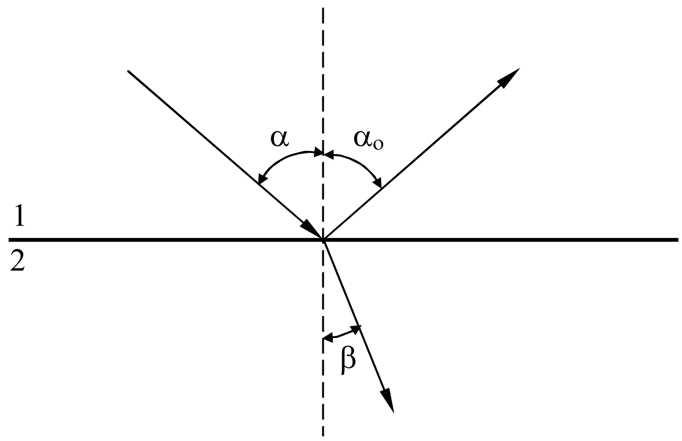
1.promień padający, załamany i normalna do powierzchni granicznej leżą w jednej płaszczyźnie;

2. stosunek sinusa kąta padania $\alpha$ do sinusa kąta załamania $\beta$ równy jest stosunkowi prędkości $v_1$ i $v_2$ światła w danych dwóch ośrodkach i jest dla danej pary ośrodków i dla danej długości fali wielkością stałą $n_{2/1}$ zwaną współczynnikiem załamania ośrodka do którego promień wchodzi (2) względem ośrodka, z którego wychodzi (1)

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2} = n_{2/1} \tag{2}$$

\

W optyce geometrycznej, zjawisko załamania światła przejawia się w zmianie kierunku biegu wiązki światła przy przejściu światła przez granicę dwóch ośrodków (rys 1.).




Rys.1 *Załamanie i odbicie promieni na granicy dwóch ośrodków izotropowych.*

Jeżeli fala świetlna o długości λ wchodzi z próżni do ośrodka, w którym prędkość światła o danej długości jest v(λ). to w tym przypadku wzór wyraża definicję bezwzględnego współczynnika załamania n(λ)danego ośrodka ( współczynnika załamania danego ośrodka względem próżni)

$$n(\lambda) = \frac{c}{\mathrm{v}(\lambda)} \tag{3}$$

gdzie c = 300 000 km/s - prędkość światła w próżni.

Zauważmy, że względny współczynnik załamania $n_{21}$ jest równy stosunkowi bezwzględnych współczynników załamania

$$n_{21} = \frac{n_1}{n_2} \tag{4}$$

Wyjaśnienie zjawiska załamania i odbicia światła oraz wyprowadzenie praw rządzących tymi zjawiskami może być dokonane w różny sposób. W optyce geometrycznej opieramy się na zasadzie Fermata. W teorii falowej uzasadnienie praw odbicia i załamania opiera na zasadzie Huygensa. Prawa te można wyprowadzić również w teorii fal elektromagnetycznych wykorzystując tzw. warunki brzegowe dla pola elektrycznego i magnetycznego na granicy dwóch różnych ośrodków.

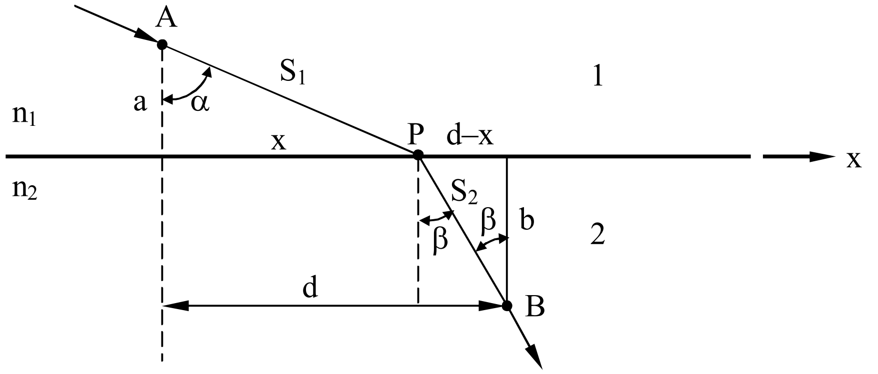
We wszystkich tych rozważaniach istotne jest założenie, że prędkość rozchodzenia się fal świetlnych jest różna w różnych ośrodkach.

Przykładowo, prawo załamania wyprowadzimy opierając się na zasadzie Fermata.

Zasada Fermata orzeka, że rzeczywista droga optyczna, jaką przebywa promień świetlny pomiędzy dwoma punktami jest najkrótsza (albo najdłuższa) spośród wszystkich możliwych dróg między tymi punktami. W praktyce spotykamy się najczęściej z przypadkiem drogi najkrótszej. Przypomnijmy, że drogą optyczną nazywamy iloczyn drogi geometrycznej *s* przez bezwzględny współczynnik załamania *n*. Dla promienia świetlnego, w ośrodkach, w których współczynnik załamania zmienia się w sposób ciągły można zasadę Fermata zapisać następująco

$$\int_A^B n\,ds = \min \tag{5}$$

Poniżej rozważymy przykład załamania promienia świetlnego na granicy dwóch ośrodków i pokażemy , że warunek minimalnej drogi optycznej przebywanej przez promień z pewnego punktu A w jednym ośrodku do innego punktu B w drugim ośrodku prowadzi do prawa załamania (2 ) . Analizowaną sytuację ilustruje rys. 2.




Rys.2 *Promień wychodzący z punktu A załamuje się na granicy ośrodków w p. C i dochodzi do punktu B.*

Całkowita droga $L$ optyczna promienia od punktu A do punktu B wynosi

$$L = n_1 s_1 + n_2 s_2 \qquad (6)$$

gdzie $s_1 = AC$, $s_2 = CB$, $n_1, n_2$ - bezwzględne współczynniki załamania ośrodka pierwszego i drugiego. Punkt C jest dowolnym punktem na granicy ośrodków. Zauważmy, dla danych punktów A i B długość drogi optycznej zależy od położenia punktu C, czyli od jego współrzędnej x.

Na podstawie zasady Fermata wiemy, że droga L musi być minimalna. Tak więc, pochodna drogi optycznej L po współrzędnej x powinna być równa zero, czyli:

$$\frac{dL}{dx} = 0 \qquad (7)$$

Korzystając z zależności geometrycznych pokazanych na rys.2 dostajemy:

$$L = n_1 \cdot s_1 + n_2 \cdot s_2 = n_1\sqrt{a^2 + x^2} + n_2\sqrt{b^2 + (d-x)^2} \qquad (8)$$

Różniczkując otrzymujemy:

$$\frac{dL}{dx} = \frac{1}{2} n_1 (a^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} 2x + \frac{1}{2} n_2 [b^2 + (d-x)^2]^{-\frac{1}{2}} 2(d-x)(-1) \qquad (9)$$

co można zapisać w postaci:

$$n_1 \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = n_2 \frac{d-x}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}} \qquad (10)$$

Równanie (7) przy uwzględnieniu definicji funkcji sinus, jest równoważne równaniu opisującym prawo załamania (3):

$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta \qquad (11)$$

Zależność współczynnika załamania od długości fali można przedstawić za pomocą krzywej dyspersji, którą otrzymujemy odkładając na osi odciętych długość fali a na osi rzędnych współczynnik załamania. Przebieg tych krzywych zależy nie tylko od rodzaju ośrodka, ale także od zakresu widmowego promieniowania. W obszarach widmowych, w których dana substancja jest przeźroczysta obserwuje się zrost współczynnika załamania w miarę zmniejszania się długości fali, (czyli zwiększania częstotliwości światła). Przypadek ten określa się jako dyspersję normalną W obszarach widma w których substancja pochłania (absorbuje) światło ma miejsce zmniejszanie się współczynnika załamania w miarę zmniejszania się długości fali (wzrostu częstotliwości, co odpowiada dyspersji anomalnej.

Zjawisko dyspersji światła można wyjaśnić opierając się na teorii oddziaływania światła z elektronami ośrodka, przez który przechodzi fala świetlna. Według tej teorii to, że światło w ośrodkach materialnych biegnie z inną prędkością niż w próżni wywołane jest przez nakładanie się (interferencję) fali pierwotnej biegnącej z próżni i wtórnych fal elementarnych pochodzących od atomów , których elektrony walencyjne wykonują drgania wymuszone pod wpływem pierwotnej fali padającej. Elektrony ośrodka, przez które przechodzi fala świetlna, posiadając charakterystyczne częstotliwości drgań własnych $\nu_0$. Padająca fala wymusza drgania o częstotliwości $\nu$ , przy czym zarówno amplituda jak i faza drgań wymuszonych elektronów, a zatem i fal wtórnych przez nie wysyłanych, zależą od różnicy pomiędzy częstotliwością drgań własnych elektronów $\nu_0$ a częstotliwością fali padającej $\nu$. Zależności fazowe między falą pierwotną a falami wzbudzonymi są tego rodzaju, że w wyniku ich superpozycji powstaje fala wypadkowa rozchodząca się w ośrodku już z inną prędkością zależną od różnicy częstotliwości fali pierwotnej (padającej) i częstotliwości drgań własnych elektronów ośrodka. Ponieważ światło białe jest mieszaniną fal o różnej częstotliwości ( długości fali), więc każda ze składowych światła białego będzie w ośrodku rozchodzić się z inną prędkością a to oznacza zgodnie ze wzorem ( ) że każdej ze składowych ( czyli każdej barwie ) odpowiada inna wartość współczynnika załamania.
Jako miarę dyspersji $D_n$ dowolnego ośrodka przyjmuje się różnicę współczynników załamania dla barwy fioletowej ( $\lambda_F = 3933{,}7$ Å )i barwy czerwonej ( $\lambda_C = 7593{,}8$ Å)

$$D_n = n_F - n_C \qquad (12)$$

Podane długości fal odnoszą się do tzw. linii K i A Fraunhofera.
Dla dowolnej długości fali $\lambda$, dyspersję można wyznaczyć na podstawie krzywej dyspersji $n(\lambda)$ jako pochodną

$$D_n = \left(\frac{dn}{d\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_k}$$

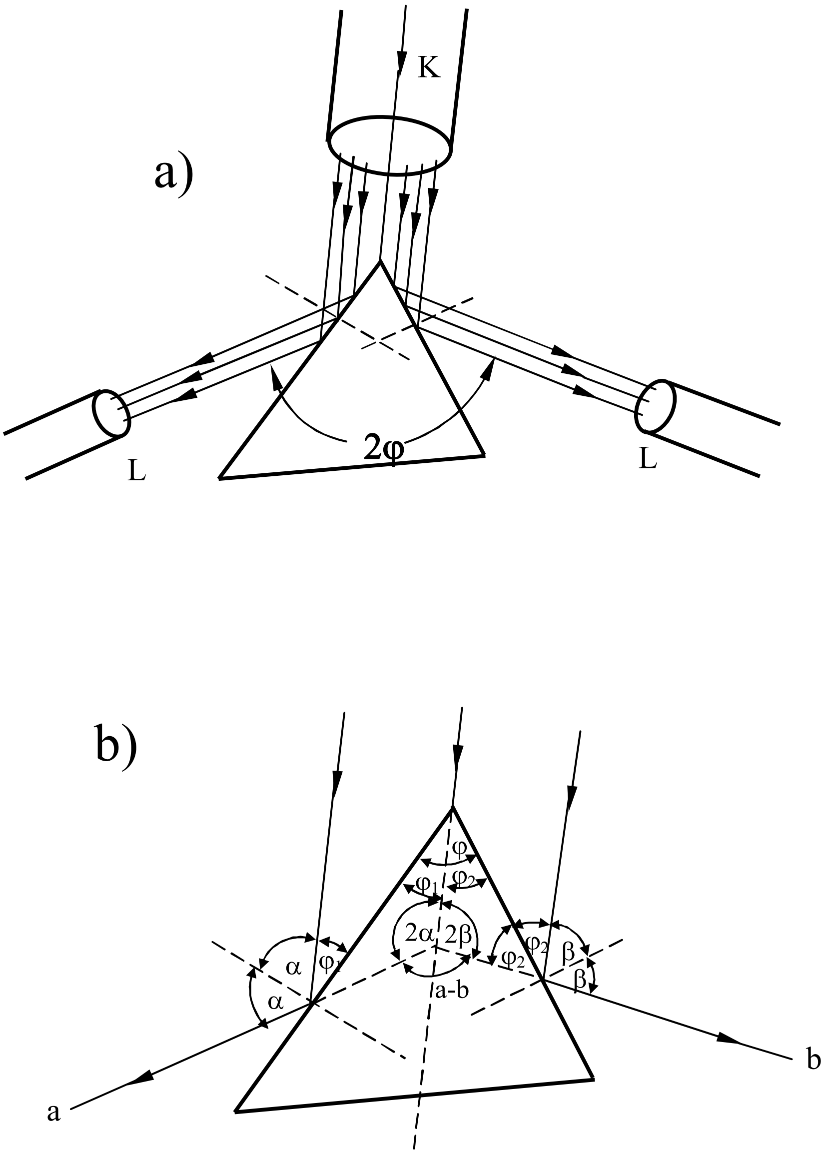
a więc wartość dyspersji dla danej długości fali $\lambda_k$ jest równa wartości tangensa kąta nachylenia stycznej do krzywej dyspersji w wybranym punkcie krzywej odpowiadającym długości fali $\lambda_k$.

## 2. Opis ćwiczenia.

Celem ćwiczenia jest wyznaczeniu wartości kąta łamiącego badanego pryzmatu, oraz wyznaczeniu dyspersji optycznej i zdolności rozdzielczej tegoż pryzmatu metodą najmniejszego odchylenia.

### 2.1 Wyznaczanie kąta łamiącego pryzmatu.

Metoda wyznaczania kąta łamiącego pryzmatu, stosowana w opisywanym ćwiczeniu polega na wykorzystaniu prawa optyki geometrycznej dotyczącego zjawiska odbicia światła (patrz wzór 2). Zasada metody zilustrowana jest na rys. 3




Rys. 3. *Wyznaczanie kąta łamiącego pryzmatu: a) obserwacja promieni odbitych od ścian pryzmatu; b) ilustracja zależności geometrycznych.*

Pryzmat ustawiamy tak, by kąt łamiący φ znalazł się na wprost kolimatora i był oświetlony wiązką równoległą. Obserwujemy przez lunetkę wiązki światła odbite od ścianek pryzmatu i określamy położenia kątowe lunety $\delta_1$ i $\delta_2$ odpowiadające tym wiązkom. Jak widać na rys.3b:

$$\delta_1 - \delta_2 = 360^\circ - 2\alpha - 2\beta$$
$$\alpha = 90^\circ - \varphi_1$$
$$\beta = 90_2^\circ - \varphi$$

czyli

$$\delta_1 - \delta_2 = 360^\circ - 2(90^\circ - \varphi_1) - 2(90^\circ - \varphi_2)$$

stąd

$$\delta_1 - \delta_2 = 2\varphi_1 + 2\varphi_2 = 2\varphi$$

i ostatecznie

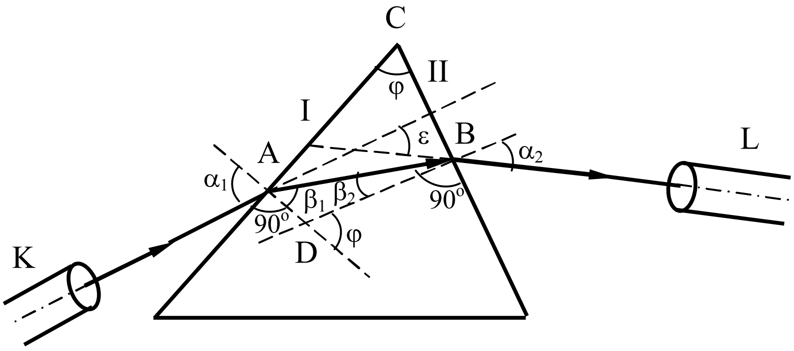
$$\varphi = \frac{\delta_1 - \delta_2}{2} \tag{14}$$

Na podstawie wzoru (11) wyznaczamy kąt łamiący φ pryzmatu przy znanych położeniach kątowych $\delta_1$ i $\delta_2$ lunety, przez którą obserwujemy wiązki odbite od ścian pryzmatu.

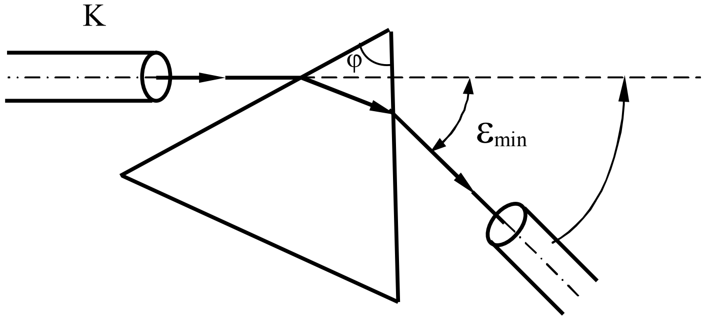
## 2.2 Wyznaczanie współczynnika załamania światła metodą najmniejszego odchylania.

Zależność kąta odchylenia ε wiązki światła monochromatycznego przechodzącej przez pryzmat od wielkości kąta padania α wiązki światła na ścianę pryzmatu o kącie łamiącym $\varphi$ uzyskujemy śledząc bieg wiązki światła przedstawiony na rys.(4a) i (4b).

**a)**




**b)**




Rys.4 *Bieg wiązki światła monochromatycznego w pryzmacie:*
*a) zależności geometryczne b) ustawienie lunety pod kątem najmniejszego odchylenia* $\varepsilon_{\min}$.

b)

Promień pada na ścianę boczną I pryzmatu pod kątem $\alpha_1$, załamuje się pod kątem $\beta_1$, pada na ścianę boczną II pod kątem $\beta_2$ i wychodzi z pryzmatu pod kątem $\alpha_2$ względem prostopadłej do ściany II, tworząc z kierunkiem promienia padającego na pryzmat kąt $\varepsilon$. Kąt $\varepsilon$ zawarty pomiędzy początkowym kierunkiem biegu wiązki, a kierunkiem po przejściu przez pryzmat nazywamy kątem odchylenia wiązki przez pryzmat. Uwzględniając fakt, że kąt zewnętrzny w trójkącie ADB jest równy kątowi łamiącemu pryzmatu φ (jako kąt o ramionach prostopadłych do ścian pryzmatu) – łatwo uzyskujemy następujące zależności geometryczne:

$$\varphi = \beta_1 + \beta_2 \tag{15a}$$

$$\varepsilon = (\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) \tag{15b}$$

czyli

$$\varepsilon = \alpha_1 + \alpha_2 - \varphi \tag{16}$$

Kąt odchylenia $\varepsilon$ zależy od kąta padania $\alpha_1$. Jeżeli obserwować będziemy prążek światła odchylonego przez pryzmat i obracać będziemy pryzmatem zmieniając w ten sposób kąt padania $\alpha_1$ to zauważymy, że prążek świetlny przemieszcza się dochodząc do pewnego położenia, a następnie cofa się pomimo, że pryzmat obracamy w dalszym ciągu tym samym kierunku. Istnieje zatem taki kąt $\alpha_1$ padania, przy którym kąt odchylenia wiązki $\varepsilon$ jest najmniejszy. Zauważmy, że wówczas promień światła w pryzmacie biegnie prostopadłe do dwusiecznej kąta łamiącego $\varphi$ i wtedy

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha \quad \text{oraz} \quad \beta_1 = \beta_2 = \beta \tag{17}$$

Dla tego przebiegu „symetrycznego”, na podstawie związków () dostajemy:

$$\varepsilon_{\min} = 2\alpha - \varphi; \Rightarrow \alpha = \frac{\varepsilon_{\min} + \varphi}{2}; \quad \varphi = 2\beta; \Rightarrow \beta = \frac{\varphi}{2} \; () \tag{18}$$

Podstawiając powyższe zależności do wzoru (2) otrzymujemy ostatecznie

$$\boxed{n = \frac{\sin \frac{\varepsilon_{\min} + \varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}}} \tag{19}$$

Wzór ten pozwala wyznaczyć współczynnik załamania $n$, gdy znamy kąt łamiący pryzmatu φ i kąt najmniejszego odchylenia $\varepsilon_{min}$ dla danej długości fali λ. W ćwiczeniu, jest to kąt obrotu lunetki od położenia na wprost kolimatora do położenia odpowiadającemu wspomnianemu „punktowi zwrotnemu” przemieszczającego się wybranego prążka obserwowanego prze lunetkę.

## 3. Wykonanie ćwiczenia.

### 3.1 Pomiar kąta łamiącego pryzmatu.

W ćwiczeniu jako źródło światła wykorzystamy neonówkę. Ustawiamy pryzmat na stoliku obrotowym tak, aby kąt łamiący znalazł się naprzeciw kolimatora K i obserwujemy w lunetce L obrazy szczeliny wytworzone przez promienie odbite od ścianek pryzmatu (rys.3a). Kąt między kierunkami L wiązek światła odbitego będzie równy 2φ. Aby więc wyznaczyć kąt łamiący pryzmatu ustawimy lunetę na obserwację wiązki odbitej od jednej ściany pryzmatu i odczytujemy położenie kątowe lunety $\delta_1$ ( z dokładnością, na jaką pozwala podziałka kątowa), następnie obserwujemy obraz promieni odbitych od drugiej ściany i notujemy położenie $\delta_2$. Kąt łamiący zgodnie ze wzorem (14) jest równy połowie różnicy tych odczytów .

Aby zwiększyć dokładność pomiaru dokonujemy odczytu na dwóch noniuszach A i B. Przy pomiarze należy zwrócić uwagę na to, by nić pajęcza przechodziła przez środek szerokości obrazu szczeliny, która powinna być możliwie wąska.

Wyniki notujemy w tabeli 1 w protokole pomiarów
Oprócz dokładności przyrządu należy uwzględnić błędy popełnione przez obserwatora przy nastawieniu krzyża z nici pajęczych na środek obrazu szczeliny.
Błąd bezwzględny pomiaru kąta łamiącego pryzmatu $|\Delta\varphi|$ przyjmujemy jako: $|\Delta\varphi|$ = dokładność odczytu + ½ szerokości kątowej obrazu szczeliny.

### 3.2 Pomiar kąta najmniejszego odchylenia promieni przez pryzmat.

Dla kąta łamiącego pryzmatu wyznaczonego w pierwszej części ćwiczenia obserwujemy barwne widmo neonówki. W sposób opisany w p.2.2 dokonujemy pomiaru kąta minimalnego odchylenia $\varepsilon_{\min}$ dla kilku kolejnych barw widma neonówki a mianowicie dla barwy czerwonej ($\lambda =$ ), żółtej ($\lambda =$ ), zielonej ($\lambda =$ ), niebieskiej ($\lambda =$ )i fioletowej ($\lambda =$ ). Wszystkie pomiary powtarzamy trzykrotnie i wyniki zapisujemy w tabeli 2 w protokole pomiarów.
Po wykonaniu powyższych pomiarów zdejmujemy pryzmat (przy zablokowanym stoliku) ustawiamy lunetę na wprost kolimatora i ponownie dokonujemy odczytu na noniuszach.. Przy pomiarze kąta najmniejszego odchylenia można zauważyć, że w okolicach punktu zwrotnego, mimo obracania stolikiem, prążek wydaje się być nieruchomy – oko nie dostrzega zmian jego położenia. Kąt obrotu stolika mierzony do momentu zatrzymania się prążka w polu widzenia do chwili, w której zaczyna „wracać" nazywamy martwym przedziałem $\Delta\phi$ i należy go wyznaczyć. Błąd bezwzględny pomiaru najmniejszego odchylenia oszacowujemy jako:
$|\Delta\varepsilon_{\min}|$=dokładność odczytu + $\frac{1}{2}$ szer. kątowej obrazu szczeliny +$\frac{1}{2}$ $\Delta\phi$ Błąd $|\Delta\varepsilon_{\min}|$ wyrażamy w radianach

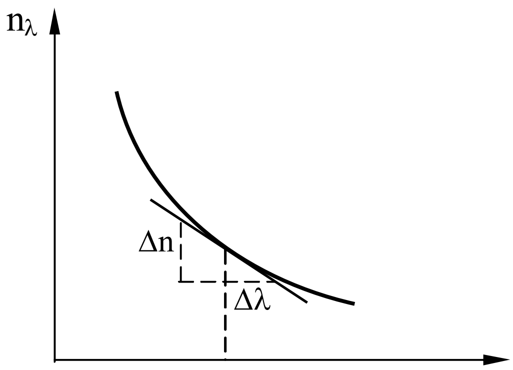
## 4. Opracowanie wyników.

4.1. Na podstawie wzoru () obliczamy kąt łamiący pryzmatu $\varphi$ i wyniki zapisujemy w tabeli 1.

4.2. Obliczamy kąty najmniejszego odchylenia $\varepsilon_{\min}$ dla poszczególnych linii neonu jako średnią wartość z trzech pomiarów. Wyniki zapisujemy w tabeli 2.

4.3. Na podstawie wzoru () obliczamy współczynniki załamania światła $n(\lambda)$ dla kolejnych linii oraz błędy $|\Delta n(\lambda)|$.

Błąd bezwzględny $|\Delta n(\lambda)|$ wyznaczonej wartości współczynnika załamania $n(\lambda)$ zależy od błędów pomiaru kątów $\varphi$ i $\varepsilon_{\min}$.Błąd ten |obliczamy metodą różniczki zupełnej.
4.4 Wykreślamy krzywą dyspersji tj. zależność współczynnika załamania światła $n(\lambda)$ od długości fali λ.
4.5 Dla trzech różnych długości fali znajdujemy wartość dyspersji materiałowej $D_n$




Rys.5 *Konstrukcja dla wyznaczania* $D_n$.

Sposób wyznaczania przybliżonej wartości dyspersji $D_n$ ilustruje rys. (5): w punkcie odpowiadającym danej długości fali wykreślamy styczną do krzywej; budujemy trójkąt o bokach $\Delta n$ i $\Delta\lambda$ i wyznaczamy tanges kąta nachylenia stycznej do krzywej $n(\lambda)$, który jest miarą dyspersji

**5. Pytania kontrolne.**

1.Jak definiujemy względny i bezwzględny współczynnik załamania światła?
2. O czym mówi zasada Fermata?
3.Co to jest dyspersja ośrodka materialnego?
4.W jaki sposób możemy zmierzyć kąt łamiący pryzmatu?
5. Na czym polega metoda wyznaczania współczynnika załamania światła przez pomiar kąta najmniejszego odchylenia?

6. Literatura.

[1] D.Holliday, R.Resnick – FIZYKA t.2 rozdz.41, PWN, Warszawa(1974);
[2] S.Szczeniowski – FIZYKA DOŚWIADCZALNA, cz. IV – Optyka, rozdz.1.7 PWN Warszawa (1963);

.